

תרגיל 6-7 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
2. מצא את כל הפונקציות השלמות (הנתונות ע"י טור חזקות) המקיימות:
(א) $|f'(z)| \leq M(1 + \sqrt{|z|})$ (ב) $|f'(z)| \leq M(1 + |z|)$
(ג) $|f(z)| \leq M(1 + |z|)$ (עבור $M > 0$ נתון).
3. מצא את פיתוח טיילור סביב 0 של הפונקציות הבאות ומצא רדיוס התכנסות:
(א) $\cos z \cdot \cosh z$ (ב) $\arcsin z$ (ג) $(a + z)^\alpha$
4. האם קיימת פונקציה אנליטית בדיסק היחידה הפתוח D כך שלכל $z \in D$ מתקיים $|f(z)| = e^{|z|}$?
5. הוכח כי טווח של פונקציה אנליטית לא קבועה בהכרח צפוף ב- \mathbb{C} .
6. הוכח כי פונקציה שלמה f המקיימת כי $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ עבור $M \in \mathbb{R}$ כלשהוא, היא קבועה.
7. תהא f פונקציה שלמה ונניח כי לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ פיתוח טיילור של f ב- z_0 נתון ע"י $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n$. נניח בנוסף שלכל $z_0 \in \mathbb{C}$ קיים n כך ש $c_n(z_0) = 0$. הוכח כי f הינה פולינום.
(רמז: השתמש במשפט על האפסים של פונקציה אנליטית. עבור איזו פונקציה תשתמש במשפט?)